E.N.S.I. M & P 1979

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 h 30

Dans un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé, un point M de coordonnées x, y, z se déplace en fonction du temps t de la manière suivante :

— il reste sur la surface d'équation cartésienne $y + z^2 = 1$;

— le support de son accélération rencontre constamment la droite d'équations $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$;

— sa projection m sur Oz a une vitesse v vérifiant à tout instant la relation: $Om^2 + v^2 = 1$;

— à l'instant $t = 0$, M est au point de coordonnées $x = y = 0$, $z = 1$, sa vitesse a pour grandeur 1, et son abscisse x commence par croître.

1° Déterminer les coordonnées de M en fonction de t. A titre de vérification on constatera qu'à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$, M est au point de coordonnées $x = y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2° Déterminer, uniquement à l'instant $t = 0$, les vecteurs unitaires (orientés arbitrairement) du trièdre de Frenet de la trajectoire de M, ainsi que la valeur de son rayon de courbure.

3° Soit C la trajectoire de M lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et soit Δ la droite d'équations $x = 0$, $y = h$, h étant un réel donné. Un cercle Γ variable est centré sur Δ, il rencontre C, et son plan reste parallèle au plan $z = 0$. Ce cercle Γ coupe le plan $x = 0$ en deux points, qui décrivent, lorsque Γ varie, une courbe L. Déterminer cette courbe L.

Faire, dans le plan $x = 0$, un dessin d'ensemble des diverses courbes L ainsi obtenues lorsque h décrit $\mathbb{R}$.

4° On prend $h = 0$, et on considère l'arc de L supposé homogène et de masse spécifique un, et limité par la condition $y \geqslant 0$. Déterminer son centre d'inertie, ainsi que son moment d'inertie par rapport à Δ.

5° Vérifier que C est située sur une sphère S centrée à l'origine des coordonnées.

Soit un réel r tel que $r \in]0, 1[$. Soit D_r le domaine intérieur à S et limité par les conditions $z \geqslant 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant r^2$.

On considère l'intégrale triple :

$$J_r = \iiint \frac{x^2 + y^2 + z^2 + z + 1}{(2x^2 + 2y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}\, dx\, dy\, dz$$

étendue au domaine D_r.

Déterminer $J = \lim_{r \to 0} J_r$. On donnera d'abord une valeur exacte du résultat (exprimée en utilisant de préférence des logarithmes népériens), puis une valeur décimale approchée.

N.B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation des calculs et des résultats.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail